Απ. 1.

No. Date 11/10/2017

Αντίστροφες Συναρτήσεις

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα. Η $f: I \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση αν και μόνο αν η f είναι 1-1. (δηλαδή με $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$)

Παρατηρούμε: Εαν f γνησίως μονότονη $\Rightarrow$ f είναι 1-1

Λήμμα (Διατήρηση διαστημάτων): Έστω I διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Τότε το σύνολο $f(I)$ είναι διάστημα

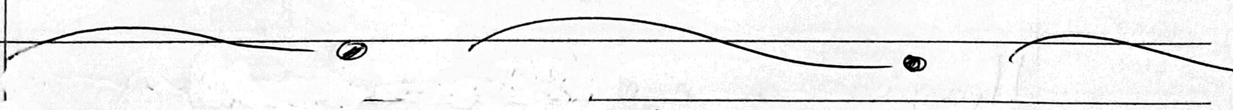
Απόδειξη

Έστω $\alpha, \beta \in f(I), \alpha < \beta$ θ.δ.ο. $[\alpha, \beta] \subseteq f(I)$

Τότε υπάρχουν $a, b \in I$ τ.ω. $\alpha = f(a)$ και $\beta = f(b)$ (a, b preimages). Από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών του Bolzano, έχουμε ότι αν $\kappa \in (\alpha, \beta) \Rightarrow \exists\, c \in I$ με $\kappa = f(c)$ $\in f(I)$

$\kappa \in (f(a), f(b))$

Άρα $[\alpha, \beta] \subseteq f(I)$, δηλαδή $f(I)$ διάστημα



$f: I \to f(I)$ αν f 1-1, $\exists\, g$ αντίστροφη $g: f(I) \to I$

$g \circ f(x) = x \quad \forall x \in I \qquad f \circ g(y) = y \quad \forall y \in f(I)$

- Δεν απαιτείται ιδιότητα συνέχειας για την f
- Αν η f είναι συνεχής το $f(I)$ είναι διάστημα

Θεώρημα (Συνεχούς αντιστρόφου)

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη και συνεχής στο I.

- Αν μια συνάρτηση σε ένα σύνολο είναι συνεχής τότε η μονότονη και 1-1 είναι το ίδιο.

Τότε, η αντίστροφος συνάρτηση g της f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής στο $J = f(I)$

Απόδειξη

Θεωρούμε την περίπτωση $f \nearrow$

Αφού f συνεχής $\xrightarrow{(\text{λήμμα})}$ $J = f(I)$ διάστημα

Επιπλέον αφού $f \nearrow$ στο I, είναι 1-1 στο I

και άρα η αντίστροφος $g : J \to \mathbb{R}$ $\exists$

Θ.δ.ο. $g \nearrow$

Πράγματι εαν $y_1, y_2 \in J$ με $y_1 < y_2$

$\exists\, x_1, x_2 \in I$ τ.ω. $f(x_1) = y_1$

$f(x_2) = y_2$

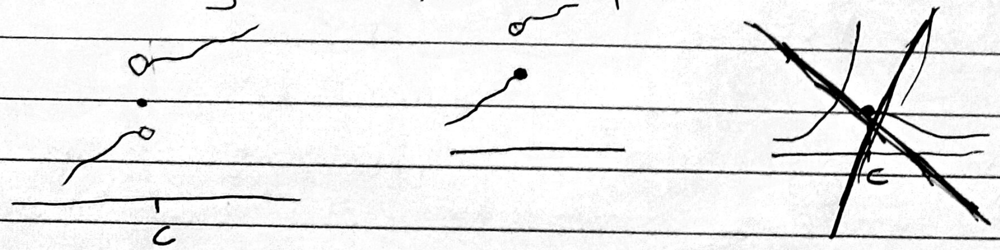
Πρέπει να ισχύει $x_1 < x_2$ γιατί διαφορετικά αν $x_1 \geq x_2$

[redacted] $\xrightarrow{f \nearrow}$ $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ Άτοπο.

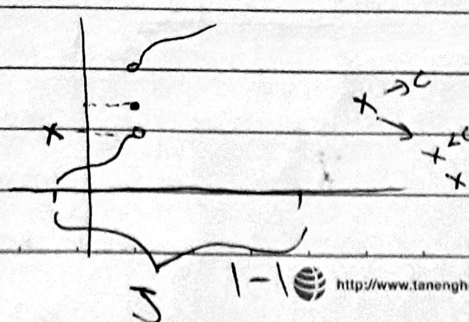
Απομένει ν.δ.ο. g είναι συνεχής στο J

Πράγματι αν η g ήταν ασυνεχής σε κάποιο $c \in I$

τότε η g θα είχε πήδημα στο c



δηλ. $\lim\limits_{y \to c^-} g < \lim\limits_{y \to c^+} g$



Έστω $x \neq g(c)$

με $\lim\limits_{x \to c^-} g < x < \lim\limits_{x \to c^+} g$

Γιατί $\lim_{x\to c^-} g$ $\exists$

$$\lim_{x\to c^-} g = \sup_{\substack{x<c \\ x\in J}} g$$

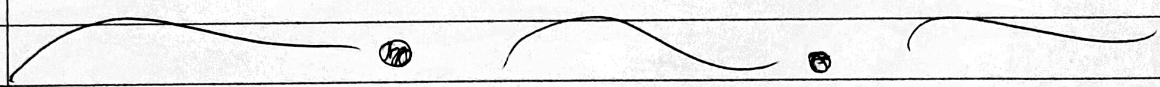
$a_n \uparrow$ και άνω φραγμένη $\Rightarrow a_n \to \sup a_n$

$J_- = \{x\in J, x<c\} = J\cap\{x<c\}$

$g(I_-)$ φραγμένο $\rightsquigarrow \sup g(I_-)$ υπάρχει

Τότε $x \neq g(y)\ \forall y\in J$ Άρα $x\notin I$ που αντιφάσκει με το γεγονός ότι I διάστημα

(Αν το $x\in I$ το $f(x)\in J$ δηλαδή $f(x)=y$



Παράγωγος

Έστω $I\subseteq\mathbb{R}$ διάστημα $f:I\to\mathbb{R}$ και $c\in I$. Λέμε ότι ο $L\in\mathbb{R}$ είναι η παράγωγος της f στο c εάν $\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=L$

Γράφουμε $L=f'(c)$

Παρατήρηση: Το c μπορεί να είναι και άκρο του διαστήματος

Παράδειγμα

$f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$. Στο $c\in\mathbb{R}$ έχω

No. Date

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x+c)(x-c)}{x-c}$$

$$= \lim_{x \to c} x + c = 2c$$

Άρα η f' ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και $f'(x) = 2x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Θεώρημα</u>: Εάν $f: I \to \mathbb{R}$ έχει παράγωγο στο $c \in I$, τότε η f είναι συνεχής στο c

<u>Απόδειξη</u>

$\forall x \in I$ με $x \neq c$ έχουμε $f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c)$

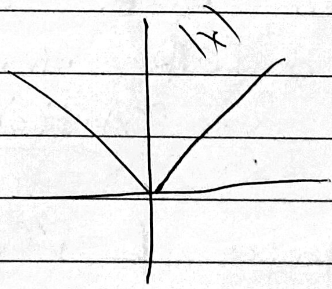
Ξέρουμε ότι $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \in \mathbb{R}$

Άρα $\lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) = f'(c) \cdot 0 = 0 \rightarrow \lim_{x \to c} f = f(c)$

Άρα η f είναι συνεχής στο c

<u>Παράδειγμα</u>

$f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$



$f'(x) = 1 \quad x > 0$

$f'(x) = -1 \quad x < 0$

Για $x \neq 0$, έχουμε

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} \rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) - f(0) = +1$

Άρα $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ δεν υπάρχει

Γεωμετρικά παράγωγος μιας συνάρτησης υπάρχει αν μπορούμε να ορίσουμε εφαπτόμενη ευθεία